Université Denis Diderot Paris 7 (2013-2014)

TD Maths, Agro

Mathieu Merle : `merle@math.univ-paris-diderot.fr`

`www.math.jussieu.fr/~merle`

Feuille d'exercices 2 : Analyse – Intégrale

Exercice 1 Trouver une primitive de

$$\begin{aligned}
f &: x \to \frac{1}{\arccos(x)\sqrt{1-x^2}} \\
g &: x \to \sin(x)\cos^5(x) \\
h &: x \to \tan^2(x) \\
u &: x \to \frac{1}{x^2+121} \\
v &: x \to x^2\ln(x^6-1) \\
w &: x \to \arctan(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &: x \to -\ln(\arccos(x)) \\
G &: x \to -\frac{1}{6}\cos^6(x) \\
H &: x \to \tan(x) - x \\
U &: x \to \frac{1}{11}\arctan\left(\frac{x}{11}\right) \\
V &: x \to \frac{x^3}{3}\ln(x^6-1) + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right) - \frac{2}{3}x^3 \\
W &: x \to x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).
\end{aligned}$$

Exercice 2 Trouver une primitive de

$$\begin{aligned}
f &: x \to \frac{x^2+3}{(x+1)^4}, \\
g &: x \to \frac{1}{x(x^7+1)} \\
h &: x \to \frac{x^3}{1+x^4} \\
u &: x \to \frac{1}{(x^2+1)^2} \\
v &: x \to \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} \\
w &: x \to \frac{2e^{2x}+e^x+1}{e^{2x}+1}.
\end{aligned}$$

Indications :

On peut écrire, pour des constantes a, b, c bien choisies,
$f(x) = a(x+1)^{-2} + b(x+1)^{-3} + c(x+1)^{-4}$.
On peut écrire $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx^6}{x^7+1}$.
Pour la fonction u on peut effectuer le changement de variables $x = \tan(t)$.
Pour la fonction w on peut effectuer le changement de variables $e^x = t$.

$$F : x \to -\frac{x^2 + x + \frac{4}{3}}{(x+1)^3}$$
$$G : x \to \frac{1}{7}\ln\left(\frac{t^7}{t^7+1}\right)$$
$$H : x \to \frac{1}{4}\ln(1+x^4)$$
$$U : x \to \frac{1}{2}\left(\arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}\right)$$
$$V : x \to \frac{-1}{x(x+1)}$$
$$W : x \to x + \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + \arctan(e^x).$$

Exercice 3 Trouver une primitive de $f : x \to \frac{1}{\cos(x)\sin(x)}$ et en déduire que

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)\sin(x)} = \ln(3).$$

En écrivant $\frac{1}{\cos(x)\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}\frac{1}{\cos^2(x)}$ on s'aperçoit que $x \to \ln(\tan(x))$ est une primitive de f sur $]0, \pi/2[$. On en déduit

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} f(x)dx = [\ln(\tan(x))]_{\pi/6}^{\pi/3} = \ln(\sqrt{3}) - \ln(1/\sqrt{3}) = \ln(3).$$

Exercice 4 Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variables recommandé

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos(x)}, \qquad \text{poser } t = \tan(x/2)$$
$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(x)\cos(x)}{1+\cos^2(x)}dx, \qquad \text{poser } u = \sin(x)$$
$$I_3 = \int_0^1 e^{2t}\ln(1+e^t)dt, \qquad \text{poser } u = e^t$$
$$I_4(x) = \int_{\pi/2}^{x} \frac{dy}{\sin(y)}, \qquad \text{poser } u = \tan(y/2)$$
$$I_5 = \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}, \qquad \text{poser } x = \tan(t).$$

1. Notons que $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, et $\frac{dt}{1+t^2} = \frac{dx}{2}$, de sorte que

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{3+t^2} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(t/\sqrt{3})\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \approx 1.814.$$

2. On a $du = \cos(x)dx$ de sorte que
$$I_2 = \int_0^1 \frac{u^3du}{2-u^2} = \left[-\frac{u^2}{2} - \ln(2-u^2)\right]_0^1 = \ln(2) - \frac{1}{2} \approx 0.193.$$
3. On a $du = e^t dt$, et donc
$$\begin{aligned} I_3 &= \int_1^e u\ln(1+u)du = \left[\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1) - \frac{1}{4}x(x-2)\right]_1^e \\ &= \frac{1}{2}(e^2-1)\ln(e+1) - \frac{1}{4}(e(e-2)+1) \approx 3.457 \end{aligned}$$
4. Notons que $\sin(y) = \frac{2u}{1+u^2}$ et que $dy = \frac{2du}{1+u^2}$, donc
$$I_4(x) = \int_1^{\tan(x/2)} \frac{du}{u} = \ln(\tan(x/2)).$$
5. On prend $t = \arctan(x)$ de sorte que $dt = \frac{dx}{1+x^2}$. Les nouvelles bornes sont $\arctan(\sqrt{3}) = \pi/3, \arctan(+\infty) = \pi/2$. On obtient
$$I_5 = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin(t)} = [\ln(\tan(t/2))]_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\ln(3) \approx 0.549.$$

Exercice 5 Calculer la limite, lorsque $n \to \infty$ des suites (définies pour $n \in \mathbb{N}^*$)
$$\begin{aligned} r_n &= \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2} \\ s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2\sqrt{n^2+k^2}} \\ t_n &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\ u_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \\ v_n &= \frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)} \\ w_n &= \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right). \end{aligned}$$
Ces suites se ramènent toutes à des sommes de Riemann de fonctions continues. Dans ce qui suit, on fait donc appel systématiquement au théorème sur la convergence de ces sommes vers l'intégrale appropriée.

1. On a
$$r_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1+k/n}{1+(k/n)^2},$$
et donc,
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} r_n &= \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}dx \\ &= \left[\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2} \approx 1.132. \end{aligned}$$

2. On a
$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k/n)^2}{\sqrt{1+(k/n)^2}},$$
et donc
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} r_n &= \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\sinh^{-1}(x)\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) \approx 0.266.\end{aligned}$$

3. On a
$$t_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k/n)^2 \sin\left(\pi(k/n)\right),$$
de sorte que
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} t_n &= \int_0^1 x\sin(\pi x)dx \\ &= \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi^2} - \frac{x\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{\pi} \approx 0.318.\end{aligned}$$

4. On a
$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}\ln\left(\pi(k/n)\right),$$
de sorte que
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} u_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\ln(1+x)dx \\ &= \left[\frac{\ln^2(1+x)}{2}\right]_0^1 = \frac{\ln^2(2)}{2} \approx 0.240.\end{aligned}$$

5. On a
$$\ln(v_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+(k/n)),$$
et donc
$$\lim_{n\to\infty}\ln(v_n) = \int_0^1 \ln(1+x)dx = [(1+x)\ln(1+x) - x]_0^1 = 2\ln(2) - 1 \approx 0.386.$$
Finalement $\lim_{n\to\infty} v_n = \exp(2\ln(2)-1) = 4e^{-1}$.

6. On a $\sin(k/n^2) = \frac{k}{n^2} + o(1/n^2)$, et donc
$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k/n)\sin(\pi(k/n)) + o(1)$$
On conclut que les limites des suites (w_n) et (t_n) coincident.

Exercice 6 Soit $f : [a,b] \to [0,1]$ continue. On suppose de plus que $\forall x \in (a,b), f(x) \neq 1$ (autrement dit, f ne peut atteindre la valeur 1 qu'en l'une des bornes de l'intervalle).

1. Soit $\epsilon > 0$ fixé ($\epsilon < (b-a)/2$). Que dire du maximum $M_{[a+\epsilon,b-\epsilon]}(f)$ de la fonction f sur l'intervalle $[a+\epsilon, b-\epsilon]$?
2. Montrer que
$$\int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f^n(x)dx \leq \left(M_{[a+\epsilon,b-\epsilon]}(f)\right)^n (b-a).$$
Déduire de la question précédente la limite quand $n \to \infty$ de $\int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f^n(x)dx$.
3. Déduire de la question précédente que
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f^n(x)dx \leq 2\epsilon.$$
4. Expliquer pourquoi notre raisonnement permet de conclure que
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f^n(x)dx = 0.$$

1. La fonction f est continue sur l'intervalle compact $[a+\epsilon, b-\epsilon]$, elle atteint donc son maximum en un point de cet intervalle. D'après notre hypothèse on a donc $M_{[a+\epsilon,b-\epsilon]}(f) < 1$.
2. Pour tout $x \in [a+\epsilon, b-\epsilon]$, on a
$$f^n(x) \leq (M_{[a+\epsilon,b-\epsilon]}(f))^n,$$
et donc, par positivité de l'intégrale,
$$\int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f^n(x)dx \leq (M_{[a+\epsilon,b-\epsilon]}(f))^n(b-a-2\epsilon),$$
ce qui permet de conclure à l'inégalité souhaitée. Comme $(M_{[a+\epsilon,b-\epsilon]}(f))^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, on conclut que
$$\lim_{n\to\infty} \int_{a+\epsilon}^{b+\epsilon} f^n(x)dx = 0.$$
3. D'autre part on a toujours $f^n(x) \leq 1$ et donc, **quelque soit** $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_a^{a+\epsilon} f^n(x) \leq \epsilon, \quad \int_{b-\epsilon}^b f^n(x)dx \leq \epsilon.$$
On déduit, par Chasles, que
$$\int_a^b f^n(x)dx \leq 2\epsilon + \int_{a+\epsilon}^{b+\epsilon} f^n(x)dx.$$
D'après la question précédente on obtient donc
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f^n(x)dx \leq 2\epsilon.$$
4. Le choix de $\epsilon > 0$ est arbitraire dans notre raisonnement. On a donc bien
$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_a^b f^n(x)dx \leq \inf_{\epsilon>0} 2\epsilon = 0.$$

Exercice 7 Soit a un réel positif et la fonction

$$f_a : \left\{ \begin{array}{l} (-a, a) \to \mathbb{R} \\ x \to \sqrt{\frac{1+x^2}{a^2-x^2}}. \end{array} \right. .$$

Calculer

$$\lim_{a \to 0, a>0} \int_{-a}^{a} f_a(x) dx.$$

On pourra commencer par établir que pour tout $x \in (-a, a)$, on a

$$\sqrt{\frac{1}{a^2 - x^2}} \leq f_a(x) \leq \sqrt{\frac{1 + a^2}{a^2 - x^2}}.$$

Pour $x \in (-a, a)$ on a $1 \leq \sqrt{1 + x^2} \leq \sqrt{1 + a^2}$, et on obtient donc facilement l'inégalité indiquée. Par positivité de l'intégrale, on a donc

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{1}{a^2 - x^2}} dx \leq \int_{-a}^{a} f(x) dx \leq \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{1 + a^2}{a^2 - x^2}} dx.$$

Or

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{1}{a^2 - x^2}} dx = \int_{-a}^{a} \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} dx = [\arcsin(x/a)]_{-a}^{a} = \pi.$$

De même

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{1 + a^2}{a^2 - x^2}} dx = \sqrt{1 + a^2} \pi.$$

Comme $\lim_{a \to 0, a>0} \sqrt{1 + a^2} \pi = \pi$, on conclut que

$$\lim_{a \to 0, a>0} \int_{-a}^{a} f_a(x) dx = \pi.$$

Exercice 8

1. Considérons une fonction ψ continue, des fonctions f, g dérivables, et définissons

$$\phi : x \to \int_{f(x)}^{g(x)} \psi(t) dt.$$

   Calculer $\phi'(x)$.

2. On considère dans cette question le cas particulier : $\psi : t \to e^t/t$ sur $\mathbb{R}^*$,
   $f : x \to x$, $g : x \to 2x$,
   de sorte que la fonction ϕ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

   a. Exprimer $\phi'(x)$.

   b. Peut-on prolonger par continuité la fonction ϕ en 0 ?

   c. Peut-on prolonger par continuité la fonction ϕ' en 0 ?

   d. Ebaucher le graphe de ϕ.

3. Dans cette question on considère l'autre cas particulier $\psi : t \to \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$ sur $\mathbb{R}$,
   $f : x \to x, g : x \to 2x$,
   de sorte que la fonction ϕ est cette fois directement définie sur $\mathbb{R}$.
   Trouver $\lim_{x \to \infty} \phi(x)$.
   Indication : on pourra étudier la monotonie de ψ et en déduire un encadrement de l'intégrale.

1. Si Ψ désigne une primitive de ψ on a

$$\phi(x) = \Psi(g(x)) - \Psi(f(x)),$$

et, puisque $\Psi' = \psi$, on obtient

$$\phi'(x) = g'(x)\psi(g(x)) - f'(x)\psi(f(x)).$$

2. **a.** D'après la question précédente on obtient ici

$$\phi'(x) = 2\psi(2x) - \psi(x) = \frac{\exp(2x) - \exp(x)}{x}.$$

b. Comme la fonction $x \to e^x$ est croissante, on a que pour tout $x > 0$, $e^x \leq e^t \leq e^{2x}$ pour tout $t \in [x, 2x]$. On en déduit que si $x > 0$,

$$e^x \ln(2) = e^x \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \leq \phi(x) \leq e^{2x} \int_x^{2x} \frac{dt}{t} = e^{2x} \ln(2),$$

où on a utilisé ci-dessus que $\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln(2)$.
Les membres de gauche et de droite de l'inégalité (1) convergent tous deux vers $\ln(2)$ lorsque $x \searrow 0$. On conclut que

$$\lim_{x \searrow 0} \phi(x) = \ln(2).$$

Pour $x < 0$, il faut faire attention que $2x < x$, et donc

$$\int_x^{2x} \psi(t)dt = -\int_{2x}^{x} \psi(t)dt.$$

Par un raisonnement similaire à ce qui précède on obtient alors

$$-e^x \ln(2) = e^{2x} \int_{2x}^{x} \frac{dt}{t} \leq -\phi(x) \leq e^x \int_{2x}^{x} \frac{dt}{t} = -e^{2x} \ln(2),$$

ce qui permet d'assurer que

$$\lim_{x \nearrow 0} \phi(x) = \ln(2).$$

La fonction ϕ est donc prolongeable par continuité en 0, et le prolongement est la fonction

$$\tilde{\phi} : \begin{cases} x \to \phi(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \ln(2) & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

c. On a, en faisant un développement limité en 0,
$\exp(2x) - \exp(x) = 2x - x + o(x) = x + o(x)$. Ainsi, lorsque $x \to 0$ $\phi'(x) \to 1$. La fonction ϕ' se prolonge donc par continuité en 0, et le prolongement prend la valeur 1 en 0.

d. La fonction $\tilde{\phi}$ est donc dérivable en 0, et $(\tilde{\phi})'(0) = 1$. Plus précisément la tangente au graphe de f en 0 est la droite $x \to \ln(2) + x$.
Par ailleurs l'encadrement (1) est valable pour tout $x > 0$, en particulier ceci implique que la fonction ϕ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to \infty$ (au moins aussi vite que $x \to \ln(2)e^x$).
L'encadrement (1) est quant à lui valable pour tout $x < 0$, en particulier ceci implique que la fonction ϕ tend vers 0 lorsque $x \to -\infty$ (au moins aussi rapidement que $x \to \ln(2)e^x$).
Ces considérations permettent d'ébaucher le graphe de ϕ.

3. La fonction ψ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc lorsque $x > 0$ on a l'encadrement

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2+x^4}} = x\psi(x) \leq \int_x^{2x} \psi(t)dt \leq x\psi(2x) = \frac{x}{\sqrt{1+4x^2+16x^4}}.$$

On voit alors facilement que les membres de gauche et de droite de l'inégalité (1) convergent tous deux vers 0 lorsque $x \to \infty$, et ceci entraîne que

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x) = 0.$$

Exercice 9

1. Calculer $\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx$, par exemple en effectuant le changement de variables $x = R\sin(\theta)$.
   Expliquer pourquoi ce calcul permet de retrouver l'aire du disque de rayon R.
2. Calculer $\int_{-R}^{R} \pi(\sqrt{R^2-x^2})^2 dx$. Pourquoi ce calcul permet-il de retrouver le volume de la boule de rayon R ?
3. Calculer $\int_{-R}^{R} \frac{4}{3}\pi(\sqrt{R^2-x^2})^3 dx$. Expliquer pourquoi ce calcul permet d'obtenir l'(hyper)volume de la boule de dimension 4 et de rayon R.
4. Expliquer pourquoi le volume de la boule de dimension n peut s'écrire

$$V_n(R) = c_n R^n,$$

   où, par convention $c_0 = 1$, et pour tout $n \geq 1$, $c_n = c_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n(\theta)d\theta$.

1. La fonction $\left\{ \begin{array}{l} [-\pi/2, \pi/2] \to [-R, R] \\ \theta \to R\sin(\theta) \end{array} \right.$ est bien un C^1-difféomorphisme et donc le changement de variables suggéré est valable. On a en outre $dx = R\cos(\theta)d\theta$, et de plus $\sqrt{R^2 - R^2\sin(\theta)} = R\cos(\theta)$ puisque $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. On obtient finalement

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2\cos^2(\theta)d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta = \frac{\pi R^2}{2}.$$

   Le calcul que l'on vient d'effectuer permet de calculer l'aire du demi-disque de rayon R, centré en l'origine, et contenu dans le demi-plan supérieur. En effet, d'après le théorème de Pythagore, la partie courbe de ce demi-disque n'est autre que le graphe de la fonction $\left\{ \begin{array}{l} [-R, R] \to \mathbb{R}_+ \\ x \to \sqrt{R^2-x^2} \end{array} \right.$. L'aire du demi-disque est la partie du demi-plan supérieur situé sous cette courbe, c'est donc bien l'intégrale que l'on vient de calculer.
   L'aire du disque est donc bien évidemment le double de l'intégrale que l'on vient de calculer, et on retrouve bien la formule habituelle

$$\text{aire(disque de rayon } R) = \pi R^2 \ .$$

   Notons par ailleurs que l'intgrand $\sqrt{R^2-x^2}dx$ n'est autre que l'aire du rectangle de côté dx et de hauteur $\sqrt{R^2-x^2}$. C'est également une très bonne approximation (au premier ordre en dx) de l'élément d'aire situé entre les abscisses $x - dx/2$ et $x + dx/2$ du demi-disque supérieur (de rayon R).
   Sommer ces éléments d'aire infinitésimaux (de manière similaire à une somme de Riemann) nous a permis de retrouver l'aire du disque. On va utiliser une idée tout à fait similaire pour trouver le volume d'une boule en dimension $n \geq 3$.

2. On note B la boule de rayon R centrée en l'origine.
   En utilisant Pythagore, on voit que les points de B situés à l'abscisse $x \in [-R, R]$ sont situés dans un disque de rayon $\sqrt{R^2 - x^2}$.
   L'élément de volume infinitésimal de B situé entre les points d'abscisse $x - dx/2$ et $x + dx/2$ est donc, au premier ordre en dx,
   $$dx \times \text{ aire d'un disque de rayon } \sqrt{R^2 - x^2} \ = dx\pi(R^2 - x^2).$$
   Le volume total de B est donc la somme de ces contributions lorsque x parcourt $[-R, R]$,
   $$\text{volume de } B = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi R^3.$$
3. On note encore B l'hyperboule (de dimension 4) centrée à l'origine et de rayon R.
   L'élément d'hypervolume infinitésimal de cette boule situé entre les abscisses $x - dx/2$ et $x + dx/2$ est, au premier ordre,
   $$dx \text{ volume d'une boule de rayon } \sqrt{R^2 - x^2} \ = dx\frac{4}{3}\pi(\sqrt{R^2 - x^2})^3.$$
   La somme de ces contributions pour $x \in [-R, R]$ fournit
   $$\text{hypervolume de } B \ = \int_{-R}^{R} \frac{4}{3}\pi(\sqrt{R^2 - x^2})^3 dx = \frac{4}{3}\pi R^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4(\theta)d\theta.$$
4. Par récurrence on peut ainsi déduire le volume d'une boule en dimension quelconque.
   Notons $V_n(R)$ l'(hyper)volume de la boule de dimension n et de rayon R. On va prouver par récurrence que pour tout $n \geq 1$,
   $$V_n(R) = c_n R^n,$$
   avec $c_1 = 2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta)d\theta$, et pour $n \geq 2$, $c_n = c_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n(\theta)d\theta$.
   D'après les questions précédentes (et la vérification immédiate dans le cas trivial $n = 1$), l'assertion est vraie pour $n = 1, 2, 3, 4$. Pour $n \geq 2$, on a, par un raisonnement similaire à celui des questions précédentes
   $$V_n(R) = \int_{-R}^{R} V_{n-1}(\sqrt{R^2 - x^2})dx = c_{n-1}R^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n(\theta)d\theta,$$
   ce qui achève la preuve.

Exercice 10 Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt.$$

1. Calculer I_0, I_1, I_2.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Est-elle convergente ?
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n + 2)I_{n+2} = (n + 1)I_n.$$
   En déduire que pour $p \in \mathbb{N}$,
   $$I_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{(p!)^2 2^{2p}}, \qquad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p + 1)!}.$$

4. Calculer nI_nI_{n-1}, pour $n \geq 1$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{I_n}{I_{n-2}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1.$$
En déduire que $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$.
6. Trouver un équivalent de (I_n) au voisinage de $+\infty$.

1. On a
$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \pi/2,$$
$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 1,$$
$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \pi/4.$$
2. Pour $x \in [0,1]$ notons que $x^n \leq x^{n-1}$. Comme la fonction $\begin{cases} [0,\pi/2] \to [0,1] \\ t \to \sin(t) \end{cases}$ est à valeurs dans $[0,1]$, on a donc que pour tout $t \in [0,\pi/2]$, $\sin^n(t) \leq \sin^{n-1}(t)$. On conclut par positivité de l'intégrale que (I_n) est une suite décroissante.
Comme elle est minorée (par 0), elle converge.
3. Par une intégration par parties, en posant $u(t) = \sin^{n+1}(t), v'(t) = \sin(t)$, on obtient
$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t)dt \\ &= \left[-\sin^{n+1}(t)\cos(t)\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\cos^2(t) \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} (\sin^n(t) - \sin^{n+2}(t))dt \\ &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}, \end{aligned}$$
ce qui entraîne l'égalité souhaitée.
4. D'après la question précédente, on a donc
$$I_{2p} = I_0 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{2p-1}{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^2 \times 4^2 \times \ldots \times (2p)^2} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}.$$
De même
$$I_{2p+1} = I_1 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \ldots \times \frac{2p}{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$
5. Fixons $n \geq 1$. D'après la question qui précède, si n est impair, i.e. $n = 2p+1$, on obtient
$$nI_nI_{n-1} = (2p+1)I_{2p}I_{2p+1} = (2p+1)\frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{\pi}{2}.$$
Si n est pair, i.e. $n = 2p$ on obtient
$$nI_nI_{n-1} = 2pI_{2p}I_{2p-1} = 2p\frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{2^{2(p-1)}((p-1)!)^2}{(2p-1)!} = \frac{\pi}{2},$$
et donc dans tous les cas, $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

6. Puisque (I_n) est décroissante
$$\frac{I_n}{I_{n-2}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1,$$
comme souhaité.
Comme d'autre part, d'après la question 3, $\frac{I_n}{I_{n-2}} = \frac{n-1}{n}$ qui converge vers 1 lorsque $n \to \infty$, on conclut par théorème de comparaison que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1.$$

7. D'après la question 5, on a
$$nI_n^2 = nI_nI_{n-1}\frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{\pi}{2}\frac{I_n}{I_{n-1}}.$$
et donc, d'après la question 6, on trouve que
$$\lim_{n\to\infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}.$$
Autrement dit, $I_n^2 \sim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n}$, et comme $I_n \geq 0$, on obtient finalement que
$$I_n \sim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi n}}.$$